٣/٢ محاضرة رقم (٦)

* $f(z) = u + iv$.

a) f is analytic function if :-

$$u_x = v_x \quad , \quad u_y = -v_x$$

b) f is Polar if :-

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \quad , \quad v_r = \frac{-1}{r} u_\theta$$

c) f is harmonic if :-

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$$

Ex: show that if $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ is analytic then $u(x,y)$ and $v(x,y)$ are harmonic.

Ex: show that if $f(z) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$ is analytic then $u(r,\theta)$ and $v(r,\theta)$ are harmonic

Sol

analytic fn:

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \quad , \quad v_r = \frac{-1}{r} u_\theta$$

Harmonic fn:-

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0 \quad ??$$

$*\ u_r = \frac{1}{r} v_\theta \ \& \ v_r = \frac{-1}{r} u_\theta$ الدالة analytic $\Leftarrow$

$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$ كي تكون الدالة (harmonic)

تفاضل بالنسبة لـ r

ونعوض عن $v_{\theta r}$

$\Rightarrow r u_r = v_\theta$ تفاضل بالنسبة لـ r

$r u_{rr} + u_r = v_{\theta r} \longrightarrow (1)$

$\Rightarrow r v_r = -u_\theta$

$\cancel{r u_{\theta r} = -u_{\theta\theta}}$ $r v_{\theta r} = -u_{\theta\theta}$

$v_{r\theta} = \frac{-1}{r} u_{\theta\theta} \longrightarrow (2)$

$v_{r\theta} = v_{\theta r}$ with (1) , (2)

$r u_{rr} + u_r = \frac{-1}{r} u_{\theta\theta}$

$\boxed{\therefore r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0}$ #

$\boxed{2}$ كيفية حساب جزء من $f(z)$ بدلالة الآخر :-

$f(z) = u + iv \quad , \quad u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$

← معنى هذه الفكرة: أن يعطى u والمطلوب حساب قيمة v أو العكس.

u معلوم ، v مجهول

$v_y = u_x$ دالة في x

ثم تكامل بالنسبة لـ y جزئياً ونجعل ثابت التكامل $C_1(x)$

$$v = \int \frac{\partial u}{\partial x}\, dy + C_1(x)$$

ونحصل على ثابت التكامل باستخدام الشرط الثاني بنفس طريقة التفكير.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Ex1: show that $u = x^2 - y^2 - y$ harmonic and find conjugate harmonic

Sol

$u_x = 2x \qquad u_{xx} = 2$

$u_y = -2y - 1 \qquad u_{yy} = -2$

$U_{xx} + U_{yy} = 0 \Rightarrow \therefore u$ is harmonic

$U_x = V_y \quad , \quad U_y = -V_x$

$V_y = 2x$

$V = \int 2x \, dy + C_1(x) = 2xy + C_1(x) \longrightarrow (1)$

$U_y = -V_x$

← هذه الخطوة نعرف منها هل الخطوات صحيحة أم هناك خطأ.

$-2y - 1 = -(2y + C_1'(x))$

$C_1'(x) = 1$

$C_1(x) = x + c$

بالتعويض في (1)

$$\boxed{V = 2xy + x + c}$$

Ex2: if $u = e^{2x} \cos ay$ is a real Part of analytic f^n find the value of a and its conjugate harmonic.

Sol

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u_x = 2e^{2x} \cos(ay)$, $u_y = e^{2x}(-a \sin(ay))$

$u_{xx} = 4e^{2x} \cos(ay)$, $u_{yy} = -a^2 e^{2x} \cos(ay)$

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

$(4 - a^2) e^{2x} \cos(ay) \;\because = 0$

$\cos ay = 0 \Rightarrow ay = \frac{(2n \pm 1)\pi}{2}$, only $e^{-\infty} = 0$.

$4 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$

$u = e^{2x} \cos(2y) \longrightarrow (1)$

$u_x = V_y \quad , \quad V_x = -u_y$

$V_y = 2e^{2x} \cos(2y)$

$V = \dfrac{2e^{2x} \sin 2y}{2} + C_1(x)$

$V_x = -u_y$

$V_x = 2e^{2x} \sin(2y) + C_1'(x) = -(-e^{2x} 2 \sin 2y)$

$C_1'(x) = 0 \implies C_1(x) = C$

$\therefore V = e^{2x} \sin(2y) + C$

EX3: (1) suppose $f(z)$ and $f'(z)$ are analytic then $f(z)$ = constant.

(2) show that if $f(z)$ is analytic $f(z) = u + iy$, and $|f(z)| = C_1$ then $f(z)$ = constant.

$\boxed{3}$ Show that if $f(z) = u + iv$ is analytic then $\nabla^2 |f(z)|^2 = 4 \left| \frac{df}{dz} \right|^2$.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\boxed{c_1 + i c_2}$$

<u>Sol</u>

$$f(z) = u + iv$$

$$|f(z)| = c_1 \Rightarrow \sqrt{u^2 + v^2} = c_1$$

$$\therefore u^2 + v^2 = c_1^2 \longrightarrow (1)$$

المطلوب توضيح أنه ثابت = u و الثابت = v.

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$$

$$u^2 + v^2 = c_1^2$$

نفاضل (1) بالنسبة لـ x

$$2 u u_x + 2 v v_x = 0$$

$$u u_x + v v_x = 0 \longrightarrow (2)$$

ـــ نفاضل (1) بالنسبة لـ y

$$2u\,u_y + 2v\,v_y = 0$$

$$u\,u_y + v\,v_y = 0 \longrightarrow (3)$$

$$u\,u_y + v\,u_x = 0 \longrightarrow (4) \quad \text{because } v_y = u_x$$

ـــ نضرب رقم (2) $*\ u$ ، رقم (4) $*\ v$ ونجمعهم

$$\therefore u^2 u_x + u v \underbrace{v_x + u v u_y}_{\hookrightarrow v_x = -u_y} + v^2 u_x = 0$$

$$\therefore (u^2 + v^2)\, u_x = 0$$

$$u^2 + v^2 = C_1 \qquad \therefore u_x = 0 \Rightarrow u = C_1(y).$$

$$\cancel{\Rightarrow v = C_2(x)}$$

$$v_y = 0 \Rightarrow v = C_2(x)$$

سنضرب ① $* \, v$ ، ④ $* \, u$ ونطرحهم :

$(u^2 - v^2) \, v_x = 0$

$u = \pm v \Longrightarrow u = \text{Constant}, \; v = \text{constant}$

<u>or</u> $v_x = 0 \Longrightarrow v = C_3(y)$

$\therefore C_3(y) = C_2(x) \qquad \therefore = \text{Constant}$

$v = \text{Constant}$

$\pm v_x = u_y = 0 \Longrightarrow u_y = 0$

$C_4(x) = C_1(y) = \text{Constant}$

$\therefore f = u + iv = \text{constant}$

where u, v are Constant.

Ch3 : Elementary Complex Function

في هذا الجزء :-

- نحاول تجميع الخواص الهامة للدوال القياسية
- يعني هنجمع الباب الأول والثاني (ليست معلومة جديدة)

1 Polynomial :-

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \cdots\cdots + a_0$$

فئة الأعداد المركبة

the function is entire

2 Exponential fn :-

$f(z) = e^z$ is entire

3 Logarithmic fn :-

$$Ln(z) = Ln\left(r e^{i(\theta \pm 2n\pi)}\right)$$

$$Ln(x+iy) = Ln\, r + i\,(\theta \pm 2n\pi)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

at $n=0$ the value is a principle value.

EX: Evaluate

$\boxed{1}$ $Ln(1+i)$ ② $(1+i)^{1+i}$

$\boxed{3}$ the roots of $e^{z}+1=0$ is $|z|<10$

Sol

$\boxed{1}$

$x=1$, $y=1$, $r=\sqrt{2}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{1}{1}=45^\circ$

$$Ln(1+i)=Ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}\pm 2n\pi\right)$$

② $$z=(1+i)^{1+i}=e^{Ln(1+i)^{(1+i)}}$$

$$=e^{(1+i)Ln(1+i)}$$

$$Ln(1+i)=Ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}\pm 2n\pi\right)$$

$$e^{(1+i)\left[\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi\right)\right]}$$

$$= e^{\ln z - \left(\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi\right)} \cdot e^{i\left[\ln\sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi\right)\right]}$$

$$= e^{\ln z - \left(\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi\right)} * \left[\cos\left[\ln\sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi\right)\right] + i\sin\left[\ln\sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi\right)\right]\right]$$

$\boxed{3}$

$$e^{z} + 1 = 0 \quad ; \quad |z| \leq 10$$

$$e^{z} = -1$$

$$z = \ln(-1)$$

$$x = -1 \ , \ y = 0 \ , \ r = 1 \ , \ \theta = \pi$$

$$z = \ln(1) + i\left(\pi \pm 2n\pi\right)$$

$$Z_n = i(1 \pm 2n)\pi$$

~~لمعرفة القيم الذي تقع فيه~~

← لمعرفة القيم التي تقع داخل الدائرة بدون رسم نعوض
عن قيم n ونجيب المقياس لو طلع أقل من (١٥) يبقى
داخل الدائرة ولو أكبر من (١٥) يكون خارج الدائرة.

$n = 0 \Rightarrow Z_0 = i\pi \in D$ D: Desk

$n = 1 \Rightarrow Z_1 = i3\pi \in D$

$n = -1 \Rightarrow Z_{-1} = i\pi \in D$

$n = -2 \Rightarrow Z_{-2} = -i3\pi$